12. ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

12.1. PRODUCTO ESCALAR

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se define el **producto escalar** de dos vectores $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ como el número real que resulta del producto matricial $\boldsymbol{u}^t\, \boldsymbol{v}$ y se nota por:

$$\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ = \boldsymbol{u}^t\, \boldsymbol{v} = (u_1 \quad \cdots \quad u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

12.1.1. PROPIEDADES

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1. Se verifica que $\prec \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \succ = \prec \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u} \succ$ para todos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ $\in \mathbb{R}^n$ (es simétrico)

2. $\prec \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v} \succ = \prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ + \prec \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \succ$ para todos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{v}$ $\in \mathbb{R}^n$ y
   $\prec \alpha\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ = \alpha \prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ$ para todos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (es bilineal)

3. para todo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ es $\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \succ \geq 0$ y $\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \succ = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (es definido positivo)

12.1.2. NORMA DE UN VECTOR

Si $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, se llama **norma** o magnitud de $\boldsymbol{u}$ al número real no negativo:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un vector **unitario** si su norma vale 1.

Si $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo y no unitario, se llama **normalizado de $\boldsymbol{u}$** al vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\boldsymbol{u}$. El normalizado de $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ es el vector:

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

EJEMPLO 1:

Dados $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ calcular el producto de $\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ$. Estudiar si $\boldsymbol{u}$ o $\boldsymbol{v}$ son unitarios, y en caso negativo normalizar los vectores.

Solución:

$$\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

Luego los vectores no son unitarios. El normalizado de $\boldsymbol{u}$ es el vector $\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

El normalizado de $\boldsymbol{v}$ es el vector: $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

12.2. DISTANCIAS Y ÁNGULOS ENTRE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, se define la **distancia** entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ como la norma del vector diferencia:

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$$

Se llama **ángulo** que forman dos vectores no nulos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ al único valor $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|}$$

Dos vectores no nulos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ **son ortogonales**, si el ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$, y se tiene que:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \succ = 0$$

EJEMPLO 2:

Dados $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, calcular $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ y el ángulo que forman $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. ¿Son ortogonales los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$?

Solución:

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{10}$$

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \alpha=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

Los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no son ortogonales.

12.3. COMPLEMENTARIO ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO

Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Se llama **complementario ortogonal** de S en $\mathbb{R}^n$ al subespacio vectorial que se nota por $S^{\perp}$ formado por todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los vectores de S:

$$S^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\succ=0\ para\ todo\ \boldsymbol{y}\in S\}$$

12.3.1. PROPIEDAD

Si $B_S=\{\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_r}\}$ es una base cualquiera de S, entonces el complementario ortogonal de S se puede definir como: $S^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x},\boldsymbol{v_i}\succ=0\ \ para\ todo\ \boldsymbol{v_i}\ \in B_S\}$

Demostración

Sea $M=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x},\boldsymbol{v_i}\succ=0\ \ para\ todo\ \boldsymbol{v_i}\ \in B_S\}$, se trata de comprobar que

$$\begin{aligned}S^{\perp}&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\succ=0\ para\ todo\ \boldsymbol{y}\in S\}\\&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x},\boldsymbol{v_i}\succ=0\ \ para\ todo\ \boldsymbol{v_i}\ \in B_S\}=M\end{aligned}$$

- Claramente se tiene que si $\boldsymbol{x} \in S^{\perp}$ entonces $\boldsymbol{x} \in M$, por tanto se verifica que $S^{\perp} \subseteq M$
- Para demostrar que también $M \subseteq S^{\perp}$, se considera un vector $\boldsymbol{x} \in M$.

  Para todo vector $\boldsymbol{y} \in S$ se tiene que $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + y_r\boldsymbol{v_r}$, y el producto $\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ$ resulta:

  $$\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = \prec \boldsymbol{x}, y_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + y_r\boldsymbol{v_r} \succ = y_1 \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v_1} \succ + \ldots + y_r \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v_r} \succ = 0$$

  Por tanto $\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = 0$ para todo $\boldsymbol{y} \in S \Rightarrow \boldsymbol{x} \in S^{\perp}$

Puesto que $S^{\perp} \subseteq M$ y $M \subseteq S^{\perp}$ se deduce que $M = S^{\perp}$ y por tanto si $B_S = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\}$ es una base de S entonces:

$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v_i} \succ = 0 \ \ para\ todo\ \boldsymbol{v_i} \in B_S\}$$

EJEMPLO 3:

Calcular una base del complementario ortogonal del subespacio $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Solución:

Las ecuaciones implícitas de $S^{\perp}$ se obtienen directamente de la definición:

$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = 0\ para\ todo\ \boldsymbol{y} \in S\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{matrix}(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 0 \\ (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{matrix}x + 2z = 0\\ x + y = 0\end{matrix}\right\}$$

Para obtener una base a partir de las ecuaciones implícitas se resuelve el sistema dado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{1} & 0 & 2 & 0\\ 0 & \boldsymbol{1} & -2 & 0\end{array}\right) \underset{z=\lambda}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix}x = -2\lambda\\ y = 2\lambda\\ z = \lambda\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Se deduce que $B_{S^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $S^{\perp}$.

OBSERVACIONES

- Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, en la unidad 9 se ha definido el **complementario** de S como un subespacio T de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dim(S + T) = n$ y $\dim(S \cap T) = 0$. Este subespacio T no es único: el subespacio S puede tener muchos subespacios complementarios en $\mathbb{R}^n$.

- El subespacio $S^{\perp}$ es un subespacio complementario de S en el sentido de que $\dim(S+S^{\perp}) = n$ y $\dim(S \cap S^{\perp}) = 0$
- Cada subespacio S de $\mathbb{R}^n$ tiene un **único** subespacio **complementario ortogonal** $S^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = 0 \; para\ todo\ \boldsymbol{y} \in S\}$.
- El subespacio complementario ortogonal de $S^{\perp}$ es S, es decir: $S^{\perp\perp} = S$

EJEMPLO 4:

Comprobar que los subespacios S y T, que tienen por bases $B_S = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_T = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ son complementarios. Determinar si T es el complementario ortogonal de S y en caso negativo calcular una base del complementario ortogonal de cada uno de ellos.

Solución:

Tanto S como T son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y verifican que: $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 1$. A partir de las bases de S y de T se obtiene un sistema de generadores de $S+T$:

$$S + T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Para calcular una base, se calcula el rango de la matriz que tiene por columnas a los vectores generadores:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0\\0 & \mathbf{1} & 0\\0 & 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

El rango es 3, por tanto $B_{S+T} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\dim(S+T) = 3$.

$$\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Se tiene que $\dim(S+T) = 3$ y $\dim(S \cap T) = 0$ por tanto S y T son subespacios complementarios, pero no son complementarios ortogonales, pues $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in T$ y

$$\prec \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \succ = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

El complementario ortogonal de S es:

$$S^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0\\(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \begin{matrix}x+y+z=0\\y-z=0\end{matrix}\right\}$$

Para obtener una base a partir de las ecuaciones implícitas se resuelve el sistema:

$$\left(\begin{matrix}1&1&1\\0&1&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\sim\left(\begin{matrix}\mathbf{1}&0&2\\0&\mathbf{1}&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\underset{z=\lambda}{\Longrightarrow}\begin{cases}x=-2\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Se deduce que $B_{S^{\perp}}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $S^{\perp}$.

El complementario ortogonal de T es:

$$T^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},x+z=0\right\}$$

Para obtener una base a partir de las ecuaciones implícitas se resuelve el sistema:

$$(\mathbf{1}\quad 0\quad 1|0)\underset{\substack{y=\lambda\\z=\mu}}{\Longrightarrow}\begin{cases}x=-\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Se comprueba que los dos vectores obtenidos son linealmente independientes, de donde se deduce que $B_{T^{\perp}}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $T^{\perp}$.